

© А. И. ФИЛИППОВ, О. В. АХМЕТОВА

Салаватский филиал Уфимского государственного нефтяного  
технического университета  
filippovai@rambler.ru, ahoksana@yandex.ru

УДК 532.546

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННО-  
ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СЛОИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ  
В ВИДЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ (часть II)\***

**PRESENTATION OF FILTRATION-WAVE FIELDS IN LAYERED  
ANISOTROPIC MEDIUM IN THE FORM OF PLANE WAVES (part II)**

В части II статьи найден первый коэффициент асимптотического разложения, обеспечивающий главную часть поправки, уточняющей геометрию волнового фронта поля давления в трехслойной анизотропной проницаемой среде. Установлено, что уравнение для первого коэффициента асимптотического разложения в центральной области, как и для нулевого, содержит значения нормальной производной от поля давления в смежной области на ее прилегающей границе (след производной). Показано, что для получения единственного решения задачи для первого коэффициента разложения условие при  $x=0$  следует ослабить и заменить условием для интеграла искомой функции (нелокальным интегральным). Задачи такого рода не являются традиционными для математической физики, поэтому рассматриваемая задача является неклассической.

Для нахождения нелокального условия осуществлена постановка задачи для остаточного члена после первого коэффициента разложения. Искомое условие определяется из требования тривиального решения задачи для остаточного члена, интегрально усредненной в интервале центрального пласта.

В пространстве синус-преобразования Фурье найдено точное решение исходной задачи. Сопоставлением полученных асимптотических решений с коэффициентами разложения точного решения параметризованной задачи в ряд Маклорена по формальному параметру подтверждена корректность развитого метода, позволяющего строить приближенные аналитические решения широкого круга физических задач.

*In the second part of the article the first coefficient of the asymptotic expansion has been found, which provides the main part of the amendment specifying the geometry of the wave front of the pressure field in a three-layered anisotropic permeable medium. It is stated that the equation for the first coefficient of the asymptotic expansion in the central region, as well as for the zero one, contains the values of the normal derivative of the pressure field in a*

---

\* Часть I см. Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1. № 1(1). С. 65-76.

related field at its adjoining border (trace of derivative). It is shown in order to obtain a unique solution of the problem for the first coefficient of expansion the condition at  $x = 0$  should be weakened and replaced by the condition for the integral of the unknown function (nonlocal integral one). The problems of this kind are not traditional for mathematical physics that is why this problem is non-classical one.

To find the nonlocal condition the formulation of the problem for the remainder after the first expansion coefficient has been carried out. The seeking condition is determined by the requirements of the trivial solution of the problem for the remainder integrally averaged in the range of the central layer.

In the space of a sine-Fourier transform the exact solution of the original problem has been found. The correctness of the developed method that allows constructing approximate analytical solution of a wide range of physical problems is confirmed by the comparison of the asymptotic solutions with the expansion coefficients of the exact solution of the parameterized problem in the Maclaurin series according to the formal parameter.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Волна, поле давления, фильтрация, анизотропные среды.

**KEY WORDS.** Wave, pressure field, filtering, anisotropic medium.

В части I статьи [1] осуществлено построение нулевого асимптотического приближения задачи о волновом поле в трехслойной пористой среде. Показано, что в центральном слое нулевой коэффициент представляет эквивалентную плоскую волну. Разработанная методика построения решений представляет значительный интерес, поскольку позволяет использовать накопленный ранее опыт анализа плоских волн для изучения двумерных волновых процессов [2-4]. Вместе с тем возникает необходимость анализа возникающих при таком подходе погрешностей и построения более детальной волновой картины в области усреднения [5-8].

В данной статье эта проблема решается путем построения первого коэффициента асимптотического разложения и анализа остаточного члена, а корректность применяемой процедуры асимптотического представления обоснована применением разложения точного решения в ряд Маклорена в пространстве изображений.

**1. Определение погрешности плоского представления фильтрационно-волнового процесса.** Из (2.6-2.10) первой части данной статьи [1] следуют выражения для первого коэффициента разложения:

$$\left(i\omega - Af \omega^2\right)P_1^{(1)} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (1.1)$$

$$\left(i\omega X - Af C \omega^2\right)P^{(1)} - \frac{\partial^2 P^{(2)}}{\partial z^2} - C^* \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (1.2)$$

$$P^{(1)}(z=1) = P_1^{(1)}(z=1), \quad \frac{\partial P^{(2)}}{\partial z}(z=1) = K \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial z}(z=0) = 0, \quad P^{(1)}(x=0) = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.2) и выражение (1.4) содержат коэффициенты первого и второго порядков разложения, поэтому соответствующая задача является «зацепленной». Для «расцепления» используем выражение для первого коэффициента разложения, полученного в пункте 3 первой части данной статьи [1]. Из (3.3) с учетом (3.4) и (4.5) первой части данной статьи [1] выражение для  $P^{(1)}$  можно записать в виде:

$$P^{(1)} = -\frac{z^2 K \varphi_1}{2} P^{(0)} + Q(x), \quad (1.5)$$

где  $Q(x)$  — функция, подлежащая определению. Для этого подставим (1.5) в (1.2) и найдем выражение для производной второго коэффициента разложения:

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial z} = -\frac{(z^3 K \varphi_1)}{6} \hat{L} P^{(0)} + z \hat{L} Q(x) + R(x),$$

$$\hat{L} = (i\omega X - Af C \omega^2) - C^* \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Согласно условию симметрии (1.4), выражение  $R(x)$  равно нулю. Далее, воспользовавшись (1.3), запишем:

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial z}(z=1) = -\frac{K \varphi_1}{6} \hat{L} P^{(0)} + \hat{L} Q(x) = K \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1). \quad (1.6)$$

Выразив  $Q(x)$  из (1.5) и подставив его в (1.6), получим уравнение для первого коэффициента разложения  $P^{(1)}$ :

$$\hat{L} P^{(1)} + K^2 \varphi_1^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{z^2}{2}\right) P^{(0)} = K \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1), \quad 0 < z < 1, \quad x > 0. \quad (1.7)$$

Задача для  $P^{(1)}$  включает также следующие уравнение и соотношение:

$$(i\omega - Af \omega^2) P_1^{(1)} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (1.8)$$

$$P^{(1)}(z=1) = P_1^{(1)}(z=1). \quad (1.9)$$

Задача (1.7-1.9) имеет множество решений. Однако если к ней добавить условие (1.4), то задача имеет только тривиальное решение. Ниже показано, что для получения единственного решения задачи для первого коэффициента разложения условие (1.4) следует ослабить и заменить нелокальным среднеинтегральным. Это обосновывается наличием погранслоя на линии  $x = 0$ ,  $0 < z < 1$ . Выполнение же граничного условия (1.4) может быть достигнуто построением

погранслойных функций (в математическом смысле) [9]. Требуемое среднеинтегральное условие найдено ниже путем осреднения задачи для остаточного члена.

**2. Определение дополнительных условий для поправки к плоской волне.** Подставив асимптотические формулы, следующие из (2.5) первой части данной статьи [1],

$$P = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \theta, \quad P_1 = P_1^{(0)} + \varepsilon P_1^{(1)} + \theta_1,$$

в (2.1-2.4) первой части данной статьи [1], и, воспользовавшись известными соотношениями для нулевого и первого коэффициентов, получим:

$$(i\omega - Af \omega^2) \theta_1 - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (2.1)$$

$$(iAf \Gamma \omega - \omega^2) \theta - \frac{C}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - C^* \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\varepsilon \left( (iAf \Gamma \omega - \omega^2) P^{(1)} - C^* \frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial x^2} \right), \quad (2.2)$$

$$0 < z < 1, \quad x > 0,$$

$$\theta_1(z=1) = \theta(z=1), \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z}(z=1) + \varepsilon \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1) = \frac{1}{\varepsilon K} \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}(z=0) = 0, \quad \theta(x=0) = -\varepsilon P^{(1)}(x=0). \quad (2.4)$$

Задача (2.1-2.4) по сложности сопоставима с исходной. Однако она позволяет определить условия, при выполнении которых осредненная задача для остаточного члена имеет тривиальное решение. Для их нахождения усредним исходную задачу в интервале центрального пласта, применив интегральную процедуру:

$$\langle \theta \rangle = \int_0^1 \theta dz.$$

С учетом результатов интегрирования

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_0^1 = K \frac{\partial \theta_1}{\partial z}(z=1) + \varepsilon K \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1),$$

которое осуществлено с использованием (2.3) и (2.4), получим следующую осредненную по толщине центрального пласта задачу для остаточного члена:

$$(i\omega - Af \omega^2) \theta_1 - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & (i\omega X - AfC\omega^2)\langle\theta\rangle - K\frac{\partial\theta_1}{\partial z}(z=1) - C^*\frac{\partial^2\langle\theta\rangle}{\partial x^2} = \\ & = \varepsilon \left[ (i\omega X - AfC\omega^2)\langle P^{(1)}\rangle - K\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1) - C^*\frac{\partial^2\langle P^{(1)}\rangle}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$0 < z < 1, \quad x > 0,$$

$$\theta_1|_{z=1} = \langle\theta\rangle|_{z=1}, \quad (2.7)$$

$$\langle\theta\rangle(x=0) = -\varepsilon\langle P^{(1)}\rangle(x=0). \quad (2.8)$$

Необходимым условием тривиального решения задачи (2.5-2.8) является обращение в нуль правых частей уравнения (2.6) и условия (2.8)

$$(i\omega X - AfC\omega^2)\langle P^{(1)}\rangle - K\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1) - C^*\frac{\partial^2\langle P^{(1)}\rangle}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (2.9)$$

$$\langle P^{(1)}\rangle(x=0) = 0. \quad (2.10)$$

Выполнение условия (2.9) обусловлено уравнением (1.2). Усреднив его, можно убедиться, что правая часть (2.8) действительно равна нулю.

Условие (2.10) может быть использовано в качестве граничного в задаче для первого коэффициента разложения. Ниже показано, что при добавлении этого условия задача для первого коэффициента разложения имеет единственное решение. При этом осредненная задача для остаточного члена имеет только нулевое решение. Поскольку осредненное значение остаточного члена при этом равно нулю, то построенное решение является в указанном смысле «в среднем точным» асимптотическим решением.

**3. Определение поправочных функций.** При добавлении среднеинтегрального условия (2.12) вместо условия (1.5) задача для первого коэффициента разложения запишется как:

$$(i\omega - Af\omega^2)P_1^{(1)} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (3.1)$$

$$\hat{L}P^{(1)} + \frac{K^2\varphi_1^2}{6}(1-3z^2)P^{(0)} - K\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1) = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (3.2)$$

$$P^{(1)}(z=1) = P_1^{(1)}(z=1), \quad (3.3)$$

$$\langle P^{(1)} \rangle(x=0) = 0. \quad (3.4)$$

Решение этой задачи отыскивается в виде (1.6), где только коэффициент  $Q(x)$  является неизвестным. Воспользовавшись синус-преобразованием Фурье, уравнение (3.2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & (i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2)P^{(1)u} - C^* sP^{(1)}(x=0) + \\ & + \frac{K^2\varphi_1^2}{6}(1-3z^2)P^{(0)u} = K \frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z}(z=1), \quad 0 < z < 1. \end{aligned}$$

Из формулы (1.1) найдем  $P^{(1)}(x=0) = -\frac{z^2}{2}K\varphi_1 P_0 + Q(0)$ , коэффициент  $Q(0)$  определим из условия (3.4):  $Q(0) = \frac{K\varphi_1}{6}P_0$ . С учетом полученных соотношений запишем задачу (3.1-3.4) в пространстве изображений:

$$(iAf\omega - \omega^2)P_1^{(1)u} - \frac{\partial^2 P_1^{(1)u}}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & (iAf\Gamma\omega - \omega^2 + C^* s^2)P^{(1)u} - \frac{C^* s(1-3z^2)K\varphi_1}{6}P_0 + \\ & + \frac{CK^2\varphi_1^2}{6}(1-3z^2)P^{(0)u} = CK \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial z}(z=1), \quad 0 < z < 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$P^{(1)u}(z=1) = P_1^{(1)u}(z=1). \quad (3.7)$$

Структура решения уравнения (3.6) имеет вид:

$$P^{(1)u} = -\frac{z^2 K\varphi_1}{2}P^{(0)u} + Q^u(s). \quad (3.8)$$

Аналогично нулевому приближению, решение уравнения (3.5) с учетом условия (3.7) представляется как

$$P_1^{(1)u} = P^{(1)u}(z=1)\exp(-\varphi_1(z-1)). \quad (3.9)$$

С помощью выражения (3.9) найдем значение производной на границе внешней области из внешней области для уравнения (3.6):

$$\frac{\partial P_1^{(1)u}}{\partial z}(z=1) = -\varphi_1 P^{(1)u}(z=1). \quad (3.10)$$

Подставляя выражения (3.8) и (3.10) в уравнение (3.6), после простых преобразований получим алгебраическое уравнение для определения  $Q^u(s)$

$$(i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + \varphi_1 K) Q^u(s) = C^* s \frac{K\varphi_1 P_0}{6} + \frac{K^2 \varphi_1^2}{3} P^{(0)u}.$$

С учетом (4.6) первой части данной статьи [1] выражение для  $Q^u(s)$  примет вид:

$$Q^u(s) = \frac{K\varphi_1 (i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + 3K\varphi_1)}{6(i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + K\varphi_1)} P^{(0)u}. \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) в (3.8), имеем:

$$P^{(1)u} = -\frac{K\varphi_1}{6} \left[ 3z^2 - \frac{i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + 3K\varphi_1}{i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + K\varphi_1} \right] P^{(0)u}. \quad (3.12)$$

Для окружающей среды с помощью (3.9) получим:

$$P_1^{(1)u} = -\frac{K\varphi_1}{6} \left[ 3 - \frac{i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + 3K\varphi_1}{i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2 + K\varphi_1} \right] P^{(0)u} \exp(-\varphi_1(z-1)). \quad (3.13)$$

Нахождение оригиналов осуществлено с использованием следующих соответствий [10]:

$$\frac{s}{a^2 + s^2} \Rightarrow \exp(-ax), \quad \frac{s}{(a^2 + s^2)^2} \Rightarrow \frac{x \exp(-ax)}{2a}.$$

Решение задачи для первого коэффициента разложения имеет вид:

$$P^{(1)} = \frac{K\varphi_1 P^{(0)}}{6} \left[ \frac{xK\varphi_1}{\sqrt{C^* (i\omega X - Af C\omega^2 + K\varphi_1)}} + 1 - 3z^2 \right], \quad (3.14)$$

$$P_1^{(1)} = \frac{K\varphi_1 P^{(0)}}{6} \left[ \frac{xK\varphi_1}{\sqrt{C^* (i\omega X - Af C\omega^2 + K\varphi_1)}} - 2 \right] \exp(-\varphi_1(z-1)). \quad (3.15)$$

В справедливости полученных выражений нетрудно убедиться прямой постановкой выражений в задачу (3.1-3.4).

С учетом выражений (1.12) первой части данной статьи [1] и (3.14) для реальной части первого коэффициента разложения получим:

$$P^{(1)} = \frac{KP_0 \exp(-\alpha x)}{6} \sqrt{\Psi^2 + \Phi^2} \cos \left[ \omega t - \beta x - \arccos \frac{\Phi}{\sqrt{\Psi^2 + \Phi^2}} \right],$$

где

$$\Psi = \frac{xK(-2\delta\alpha\gamma + \beta\gamma^2 - \delta^2\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \delta(1 - 3z^2),$$

$$\Phi = \frac{xK(\gamma^2\alpha + 2\delta\beta\gamma - \delta^2\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2} + \gamma(1 - 3z^2).$$

Аналогично из (1.12) первой части данной статьи [1] и (3.15) получим реальную часть первого коэффициента разложения в окружающей среде:

$$P_1^{(1)} = \frac{KP_0 \exp(-\alpha x - \gamma(z-1)) \sqrt{\Psi^2 + \Phi^2}}{6} \times$$

$$\times \cos \left[ \omega t - \beta x - \delta(z-1) - \arccos \frac{\Phi}{\sqrt{\Psi^2 + \Phi^2}} \right].$$

Выражения для первого коэффициента разложения уточняют фильтрационно-волновые поля давления в нулевом приближении и обеспечивают детальное описание геометрии волнового фронта в пласте. Отметим, что коэффициенты поглощения  $\alpha$ , фазы  $\beta$ , функций частоты  $\gamma$  и  $\delta$  в первом коэффициенте разложения определяются теми же выражениями, что и в нулевом приближении [1].

На рисунке представлены линии равного давления при распространении фильтрационной волны в нулевом и первом приближениях. При построении графиков все коэффициенты приняты равными единице. Первое приближение уточняет геометрию фронта исследуемой волны в зоне представления плоской волной.

**4. Проверка достоверности представления волны в виде плоской.** Точное решение задачи (2.1-2.4) первой части данной статьи [1] можно получить, воспользовавшись синус-преобразованием Фурье [8]

$$(i\omega - Af\omega^2)P_1^u - \frac{\partial^2 P_1^u}{\partial z^2} = 0, \quad z > 1, \quad (4.1)$$

$$(i\omega X - Af C\omega^2 + C^* s^2)P^u - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^u}{\partial z^2} - C^* s P_0 = 0, \quad 0 < z < 1, \quad x > 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial P^u}{\partial z}(z=1) = 0, \quad (4.3)$$

$$P_1^u(z=1) = P^u(z=1), \quad K \frac{\partial P_1^u}{\partial z}(z=1) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P^u}{\partial z}(z=1). \quad (4.4)$$



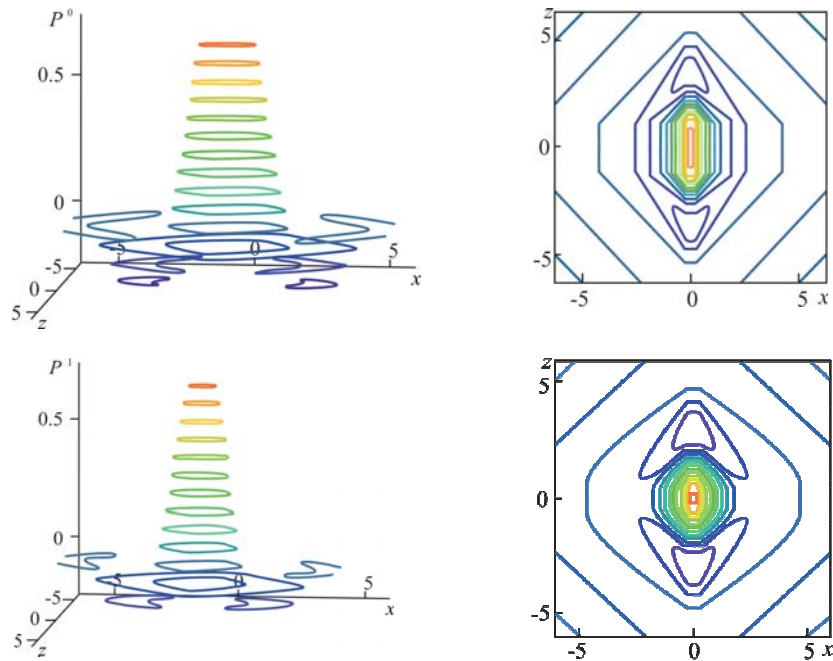


Рис. Линии равного давления при распространении волны в момент времени  $t = 0$ : а, б — в нулевом приближении, в, г — в первом приближении

Решение уравнения (4.1) имеет вид:

$$P_1^u = P^u(z=1)\exp(-\varphi_1(z-1)).$$

Общее решение уравнения (3.2) запишется следующим образом:

$$P^u = \frac{C^* s P_0 \varepsilon}{\varphi_2^2} + C_1 \exp(-\varphi_2 z) + C_2 \exp(\varphi_2 z),$$

где  $\varphi_2 = \sqrt{\varepsilon(i\omega X - Af C\omega^2 + s^2)}$ . Из (4.3) следует, что  $C_1 = C_2$ . Вид  $C_1$  определяется из условия (4.4)

$$C_1 = -\frac{\varepsilon^2 s P_0 C^* K \varphi_1}{2\varphi_2^2 (\varepsilon K \varphi_1 \operatorname{ch}(\varphi_2) + \varphi_2 \operatorname{sh}(\varphi_2))}.$$

Точное решение задачи (4.1-4.4) имеет вид:

$$P^u = \frac{s C^* P_0 \varepsilon}{\varphi_2^2} \left[ 1 - \frac{\varepsilon K \varphi_1 \operatorname{ch}(\varphi_2 z)}{K \varphi_1 \varepsilon \operatorname{ch}(\varphi_2) + \varphi_2 \operatorname{sh}(\varphi_2)} \right],$$

$$P_1^u = \frac{s C^* P_0 \varepsilon}{\varphi_2^2} \frac{\varphi_2 \operatorname{sh}(\varphi_2) \exp(-\varphi_1(z-1))}{K \varphi_1 \varepsilon \operatorname{ch}(\varphi_2) + \varphi_2 \operatorname{sh}(\varphi_2)}.$$

Нетрудно убедиться, что  $P^u$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадает с выражением (5.7) первой части данной статьи [1], а  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial P^u}{\partial \varepsilon}$  — с выражением для первого коэффициента разложения (3.12). Такое сопоставление является прямой проверкой справедливости развитого выше метода решения волновых задач сопряжения.

Итак, применение «в среднем точной» модификации асимптотического метода к задаче о фильтрационно-волновом поле в неоднородной анизотропной среде позволяет представить выражения для любого волнового процесса в виде плоской волны (нулевое приближение), а также определить реальную геометрию волнового фронта (первое приближение). При этом решения краевых задач в нулевом и первом приближении совпадают с выражениями соответствующих коэффициентов в формальном разложении Маклорена точного решения задачи о фильтрационно-волновых полях в неоднородной пористой среде. Поэтому найденные решения расширяют возможности исследования волновых полей давления применительно к реальным условиям в акустическом каротаже, сейсморазведке и при интенсификации нефтеизвлечения.

**Обозначения:**

$\tilde{P}$  — безразмерное давление;

$P$  — амплитуда безразмерного давления;  $t, \tau$  — соответственно безразмерное время и размерное время, с;

$x, z$  — безразмерные линейные координаты;

$\delta, \gamma$  — вспомогательные функции частоты;

$\varepsilon$  — параметр асимптотического разложения;

$\omega$  — безразмерная циклическая частота.

Индексы нижние: 0 — начальные значения параметров, 1 — номер среды,  $z, x$  — направление,  $d$  (dimension) — размерный.

Индексы верхние (в скобках) — порядковый номер коэффициента асимптотического разложения.

Обозначения математических символов — общепринятые.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А. И., Ахметова О. В. Представление фильтрационно-волновых полей в слоистой анизотропной среде в виде плоской волны (часть I) // Вестник Тюменского государственного университета. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1 № 1(1). С. 65-76.

2. Кулик В. М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47. № 3 (277). С. 104-111.

3. Шостак А. С., Першанин Д. А. Зондирование неоднородных материальных сред плоскими волнами горизонтальной и вертикальной поляризации // Известия высших учебных заведений. Физика. 2012. Т. 55. № 8. С. 128-129.

4. Цапенко Н. Е. Падение плоской электромагнитной волны на неоднородный слой // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2010. № 6. С. 153-158.

5. Ахметова О. В., Филиппов А. И., Филиппов И. М. Квазистационарные поля давления при линейной фильтрации в неоднородном анизотропном пласте в асимпто-

тическом приближении // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2012. № 3. С. 89-100.

6. Филиппов А. И., Ахметова О. В., Заманова Г. Ф. Асимптотические представления упругих волновых полей в проницаемых пластах // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 5. С. 548-558.

7. Филиппов А. И., Ахметова О. В., Заманова Г. Ф., Ковальский А. А. Установившиеся двумерные фильтрационно-волновые поля при заданных гармонических возмущениях давления на границе // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». 2014. № 5. С. 181-208.

8. Филиппов А. И., Ахметова О. В. Одномерные монохроматические плоские фильтрационные волны // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 2. С. 285-290.

9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 344 с.

#### REFERENCES

1. Filippov, A. I., Akhmetova, O. V. Predstavlenie fil'tratsionno-volnovykh polej v sloistoj anizotropnoj srede v vide ploskoj volny (chast' I) // Bulletin of the Tyumen State University. Physical and mathematical modeling. Oil, Gas, Energy. № 1(1). Т. 1. 2015. Pp. 65-76.

2. Kulik, V. M. Ploskaja volna deformatsii v izotropnom sloe vjaskouprugogo materiala // Prikladnaja mekhanika i tekhnicheskaja fizika. 2006. Т. 47. № 3 (277). Pp. 104-111.

3. Shostak, A. S., Pershanin, D. A. Zondirovanie neodnorodnykh material'nykh sred ploskimi volnami gorizonta'noj i vertikal'noj poljarizatsii // Izvestija vysshikh uchebnykh zavedenij. Fizika. 2012. Т. 55. № 8. Pp. 128-129.

4. Capenko, N. E. Padenie ploskoj elektromagnitnoj volny na neodnorodnyj sloj // Gornyj informatsionno-analiticheskij bjulleten' (nauchno-tekhnicheskij zhurnal). 2010. № 6. Pp. 153-158.

5. Akhmetova, O. V., Filippov, A. I., Filippov, I. M. Kvazistatsionarnye polja davlenija pri linejnoj fil'tratsii v neodnorodnom anizotropnom plaste v asimptoticheskom priblizhenii // Izvestija Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika zhidkosti i gaza. 2012. № 3. Pp. 89-100.

6. Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., Zamanova, G. F. Asimptoticheskie predstavlenija uprugikh volnovykh polej v pronitsaemykh plastakh // Akusticheskij zhurnal. 2013. Т. 59. № 5. Pp. 548-558.

7. Filippov, A. I., Akhmetova, O. V., Zamanova, G. F., Kovalskij, A. A. Ustanovivshiesja dvumernye fil'tratsionno-volnovye polja pri zadannykh garmonicheskikh vozmuschenijakh davlenija na granitse // Elektronnyj nauchnyj zhurnal Neftegazovoe delo. 2014. № 5. Pp. 181-208.

8. Filippov, A. I., Akhmetova, O. V. Odnomernye monokhromaticheskie ploskie fil'tratsionnye volny // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 2015. Т. 88. № 2. Pp. 285-290.

9. Vasil'eva, A. B., Butuzov, V. F. Asimptoticheskie metody v teorii singuljarnykh vozmuschenij // М.: Vysshaja shkola, 1990. 208 p.

10. Bejtmen, G., Jerdeji, A. Tablitsy integral'nykh preobrazovanij. Т. 1. М.: Nauka, 1969. 344 p.

**Авторы публикации**

**Филиппов Александр Иванович** — профессор кафедры общенаучных дисциплин Салаватского филиала Уфимского государственного нефтяного технического университета, доктор технических наук

**Ахметова Оксана Валентиновна** — доцент кафедры общенаучных дисциплин Салаватского филиала Уфимского государственного нефтяного технического университета, кандидат физико-математических наук

**Authors of the publication**

**Alexandr I. Filippov** — Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of "General scientific discipline" FSBEI HPE USPTU, Salavat Branch

**Oksana V. Akhmetova** — Candidate of Physics — Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of "General scientific discipline" FSBEI HPE USPTU, Salavat Branch